**Сергеева Диана РК6-56Б**

**Задача 7.3**

Требуется доказать, что метод Якоби, примененный к , вне зависимости от начального условия всегда сходится к единственному решению , если матрица обладает строгим диагональным преобладанием.

В матричном виде метод Якоби предполагает разложение матрицы на диагональную, нижнюю треугольную и верхнюю треугольную составляющие:

Или:

,

Или из курса лекций мы знаем, что матричная форма метода Якоби имеет вид:

*.*

Причем:

,

.

**Теорема:** последовательность , сгенерированная итерацией , сходится к единственному решению уравнения , т.е. неподвижной точке , для любого тогда и только тогда, когда .

Для спектрального радиуса существует свойство:

**Теорема:** пусть . Тогда для любой индуцированной матричной нормы.

То есть для сходимости этой последовательности при любом начальном приближении необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы были по абсолютной величине меньше единицы. На практике это трудно, воспользуемся достаточным условием сходимости: метод сходится, если норма матрицы меньше единицы. То есть метод Якоби сходится, если спектральный радиус матрицы меньше единицы.

Начнём с нахождения верхней границы для .

Формула векторной нормы для матрицы:

То есть:

Из условия заметим, что при и что при . Также из матричного вида метода Якоби видно, что .

Тогда перепишем:

По условию задачи наша матрица должна обладать строгим диагональным преобладанием, то есть должно выполняться условие:

Из этого условия следует:

То есть:

Тогда из теорем следует, что так как , то и , то есть метод Якоби, примененный к , вне зависимости от начального условия всегда сходится к единственному решению , если матрица обладает строгим диагональным преобладанием.